

Title	境界要素法による連成熱弾性問題の解析(境界要素法の数学的理論とその周辺(1))
Author(s)	登坂, 宣好; 除, 日教
Citation	数理解析研究所講究録 (1989), 691: 27-51
Issue Date	1989-05
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/101305">http://hdl.handle.net/2433/101305</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

境界要素法による連成熱弾性問題の解析

Boundary Element Analysis of Coupled

Dynamic Thermoelastic Problems

日大生産工 登坂 宣好 (Nobuyoshi TOSAKA)

日大大学院

生産工学研究科 徐 日教 (Illi-gyo SUH)

Abstract

In this paper, the boundary integral equation and its numerical implementation of two dimensional dynamic coupled thermoelasticity problems are developed in the manner by using the newly derived fundamental solution for the transformed coupled equations of elliptic type and the numerical inversion of Laplace transformation.

The boundary element unsteady solutions of the second Danilovskaya problem and Sternberg-Chakravorty problem in the half-space are demonstrated through comparison of the existing solutions.

## 1. 序

近年、境界要素法の発展は著しく、急速にその適用分野を拡大しつつある。しかし、静または動弾性問題や熱伝導問題への境界要素法の有効性が示されているにもかかわらず、温度場と変位場とが完全に連成する連成熱弾性問題へのその適用例はたいへん少ない。<sup>10-12</sup> 著者は、これまで文献[1]-[4]において、線形連成熱弾性問題に対し、新しい境界要素解析手法を提案し、複雑な熱弾性現象に対する近似解法の可能性を示してきた。

本論では、dynamic theoryにおける時間依存の基本解の、陽な表現が困難であることから、dynamic theoryにおける基本微分方程式系をラプラス変換を利用し、像空間での基本解を構成し、それを利用して得られた境界積分方程式の離散解を数値ラプラス逆変換により非定常解とする手法を紹介する。さらに、半無限空間における2種類の問題（第2種 Danilovskaya 問題<sup>16</sup>、Sternberg-Chakravorty 問題<sup>17</sup>）に対し、本手法により得られた数値解を他手法により得られた既存の解との比較を通し、提案手法の適用性および妥当性を示す。

なお、ここで対象とする動的な熱弾性理論はいわゆる古典理論と呼ばれるものである。ここで紹介する手法は、一般化された理論に対しても適用可能であることが文献[4]で示さ

れているので参照されたい。

## 2. 連成熱弾性問題

### 2.1 基本関係式

線型等方等質の2次元熱弾性体に対する次の連立偏微分方程式の初期値 - 境界値問題を考える。<sup>20</sup>

基本微分方程式

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} - \gamma \theta_{,i} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\theta_{,ii} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta \dot{u}_{i,i} + \frac{1}{\kappa} Q = 0 \quad (2)$$

$$(i, j = 1, 2)$$

$$\kappa = \frac{k}{\rho c}, \quad \eta = \frac{\gamma}{k} \theta_0, \quad Q = \frac{\kappa}{k} p \quad (3)$$

初期条件

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, 0) &= {}_0 u_i(\mathbf{x}) \\ \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) &= {}_0 v_i(\mathbf{x}) \\ u_{i,i}(\mathbf{x}, 0) &= {}_0 e(\mathbf{x}) \\ \theta(\mathbf{x}, 0) &= {}_0 \theta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4)$$

境界条件

$$\begin{aligned} u_i &= \hat{u}_i & \text{on } \mathcal{J} \times \Gamma_u \\ \tau_i = \tau_{ij} n_j &= \hat{\tau}_i & \text{on } \mathcal{J} \times \Gamma_\tau \\ \theta &= \hat{\theta} & \text{on } \mathcal{J} \times \Gamma_\theta \\ q = \theta_{,i} n_i &= \hat{q} & \text{on } \mathcal{J} \times \Gamma_q \end{aligned} \quad (5)$$

ここで解析対象領域を  $\Omega$ 、その境界を  $\Gamma$ 、 $\Gamma$  の外向き単位法線 vector を  $\mathbf{n}$  とし、時間領域を  $\mathcal{T} = [0, t]$  で表わす。また、 $u_i, \tau_{ij}, \theta, q, b_i, p$  は各々変位、応力、基準温度との温度差、熱流束、単位質量当りの物体力、内部発熱量であり、 $\rho, \gamma, k, c$  は各々密度、熱弾性係数、熱伝導率、比熱とする。

式 (1) と式 (2) の基礎関係式は、エネルギー方程式に含まれている物体の体積変化に寄与する力学的連成項によって運動方程式との連成問題として与えられている。このような連成問題の非定常解を積分方程式により求める際、問題の時間依存基本解を構成することが困難であるため、ラプラス変換手法を導入し、transformed space で解析して得られた結果をラプラス逆変換することによって非定常解を定める。

式 (1) と式 (2) にラプラス変換を適用すると、次式を得る。

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{j,ij} - \rho \omega^2 \bar{u}_i - \gamma \bar{\theta}_{,i} = -G_i \quad (6)$$

$$\bar{\theta}_{,ii} - \frac{\omega}{k} \bar{\theta} - \eta \omega \bar{u}_{i,i} = -H \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} G_i &= \rho \bar{b}_i + \rho \omega_0 u_i + \rho_0 v_i \\ H &= \frac{1}{k} \bar{Q} + \frac{1}{k_0} \theta + \eta_0 e \end{aligned} \quad (8)$$

とし、また物理量  $u_i$  と  $\theta$  の変換量を

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^\infty u_i(\mathbf{x}, t) e^{-\omega t} dt \quad (9)$$

$$\bar{\theta}(\mathbf{x}, \omega) = \int_0^\infty \theta(\mathbf{x}, t) e^{-\omega t} dt$$

とする。

式(6)と式(7)は次のような行列表現として表わすことができる。

$$L_{ij} \bar{U}_j = \bar{B}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (10)$$

ここで、

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu)D_1^2 - \rho\omega^2 & (\lambda + \mu)D_1D_2 & -\gamma D_1 \\ (\lambda + \mu)D_1D_2 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)D_2^2 - \rho\omega^2 & -\gamma D_2 \\ -\eta\omega D_1 & -\eta\omega D_2 & \Delta - \frac{\omega}{\kappa} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{U}_j\} &= \{\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{\theta}\}^T \\ \{\bar{B}_i\} &= \{-G_1 \ -G_2 \ -H\}^T \end{aligned} \quad (12)$$

とし、 $D_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ 、 $\Delta = D_\alpha D_\alpha$ を表わす。

## 2.2 境界積分方程式

式(10)に対して基本解テンソル  $v_{ik}^*$  を重み関数とする次の重み付き残差表現式を考える。

$$\int_\Omega (L_{ij} \bar{U}_j - \bar{B}_i) v_{ik}^* d\Omega = 0 \quad (13)$$

式(13)に発散定理を適用し、内部点を境界上の点に近づける極限操作を行なうと、次のような境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
& c_{kj} \bar{u}_k(\mathbf{y}; \omega) \\
&= \int_{\Gamma} \{ \bar{\tau}_{\alpha}(\mathbf{x}; \omega) V_{\alpha j}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) - \bar{u}_{\alpha}(\mathbf{x}; \omega) \Sigma_{\alpha j}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) \} d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \int_{\Gamma} \{ \bar{q}(\mathbf{x}; \omega) V_{3j}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) - \bar{\theta}(\mathbf{x}; \omega) \Sigma_{3j}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) \} d\Gamma(\mathbf{x}) \\
&- \int_{\Omega} \bar{B}_i(\mathbf{x}; \omega) V_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\Sigma_{3j}^* = \partial V_{3j}^* / \partial n \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2)$$

ここで、 $c_{kj}$  は形状係数で、滑らかな境界の場合、 $c_{kj} = \delta_{kj} / 2$  で与えられる。

基本解テンソル  $V_{jk}^*$  は次の微分方程式を満足する解である。

$$L_{ij} V_{jk}^* = -\delta_{ik} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (15)$$

上式の  $L_{ij}$  は  $L_{ij}$  の adjoint operator で、行列 (11) より次のように与えられる。

$$[L_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu) D_1^2 - \rho\omega^2 & (\lambda + \mu) D_1 D_2 & \eta\omega D_1 \\ (\lambda + \mu) D_1 D_2 & \mu\Delta + (\lambda + \mu) D_2^2 - \rho\omega^2 & \eta\omega D_2 \\ \gamma D_1 & \gamma D_2 & \Delta - \frac{\omega}{\kappa} \end{bmatrix} \quad (16)$$

また、式 (14) における traction vector  $\bar{\tau}_{\alpha}$  と pseudo-traction tensor  $\Sigma_{\alpha j}^*$  は各々次のように定義される。

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{\alpha} &= \bar{\tau}_{\alpha\beta} n_{\beta} \\
&= \{ (\lambda \bar{u}_{k,k} + \gamma \bar{\theta}) \delta_{\alpha\beta} + \mu (\bar{u}_{\alpha,\beta} + \bar{u}_{\beta,\alpha}) \} n_{\beta} \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\Sigma_{\alpha j}^* = \{ (\lambda V_{k j,k}^* + \eta\omega V_{3j}^*) \delta_{\alpha\beta} + \mu (V_{\alpha j,\beta}^* + V_{\beta j,\alpha}^*) \} n_{\beta} \quad (18)$$

また、領域内部の応力は式 (14) より得られた境界値と

Duhamel-Neumannの関係式によって、次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{ij}(y) = & \int_{\Gamma} \{S_{ija}\bar{\tau}_a + S_{ij3}\bar{q}\} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \{D_{ija}\bar{u}_a + D_{ij3}\bar{\theta}\} d\Gamma - \int_{\Omega} S_{ijk}\bar{B}_k d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、

$$\begin{aligned} S_{ijk} &= (\lambda V_{km,m}^* - \gamma V_{k3}^*)\delta_{ij} + \mu(V_{ki,j}^* + V_{kj,i}^*) \\ D_{ijk} &= (\lambda \Sigma_{km,m}^* - \gamma \Sigma_{k3}^*)\delta_{ij} + \mu(\Sigma_{ki,j}^* + \Sigma_{kj,i}^*) \\ \Sigma_{3m}^* &= \partial V_{3m}^* / \partial n \quad (i, j = 1, 2, \quad k, m = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

### 2.3 基本解

基本解テンソル  $V_{ij}^*$  を基本解  $\phi^*$  と  $L_{ij}$  の転置余因子行列  $\mu_{ij}$  によって次のように表わすことにする。<sup>9, 22</sup>

$$V_{ij}^* = \mu_{ij}\phi^* \quad (20)$$

ここで、 $\phi^*$  は微分作用素  $L = \det(L_{ij})$  の基本解として次の式を満足するものとなる。

$$L\phi^* = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (21)$$

この時、微分作用素は次のように与えられる。<sup>21</sup>

$$L = \mu(\lambda + 2\mu)(\Delta - h_1^2)(\Delta - h_2^2)(\Delta - h_3^2) \quad (22)$$

式(21)と式(22)によって基本解  $\phi^*$  は次のように構成される<sup>8</sup>。



$$\phi^*(r) = \frac{1}{2\pi\mu(\lambda+2\mu)A} \{ (h_2^2 - h_3^2)K_0(h_1 r) + (h_3^2 - h_1^2)K_0(h_2 r) + (h_1^2 - h_2^2)K_0(h_3 r) \} \quad (23)$$

ただし、 $K_0$  は変形 0 次 Bessel 関数、 $r = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$

$$A = -(h_1^2 - h_2^2)(h_2^2 - h_3^2)(h_3^2 - h_1^2) \quad (24)$$

であるし、 $h_1^2$ 、 $h_2^2$ 、 $h_3^2$  は次の関係を満足する。

$$h_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

$$h_2^2 + h_3^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} + (1 + \delta)\frac{\omega}{\kappa} \quad (25)$$

$$h_2^2 h_3^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{\omega}{\kappa}$$

式 (25) において  $\delta$  は

$$\delta = \frac{\eta\gamma\kappa}{\lambda+2\mu} \quad (26)$$

のように与えられるし、熱弾性連成係数といわれる。

結局、基本解テンソル  $v_{ij}^*$  と pseudo-traction tensor  $\Sigma_{ij}^*$  は式 (20) と式 (23) および式 (18) より次のように与えられる。

$$v_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} \sum_{k=1}^3 W_k [\psi_k^*(r) \delta_{\alpha\beta} - \chi_k^*(r) r_{,\alpha} r_{,\beta}]$$

$$V_{\alpha 3}^* = \frac{\eta \omega}{2\pi \rho c_1^2} \sum_{k=1}^3 W_k \xi_k^*(r) r,_{\alpha} \quad (27)$$

$$V_{3\beta}^* = \frac{\gamma}{2\pi \rho c_1^2} \sum_{k=1}^3 W_k \xi_k^*(r) r,_{\beta}$$

$$V_{33}^* = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 W_k \zeta_k^*(r)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^* &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 W_k [(\Psi_{,r}^* - \chi_{\frac{1}{r}}^*) (r,_{\alpha} n_{\beta} + \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{\alpha\beta}) \\ &\quad - 2\chi_{,r}^* r,_{\alpha} r,_{\beta} \frac{\partial r}{\partial n} - \chi_{\frac{2}{r}}^* (r,_{\beta} n_{\alpha} - 2r,_{\alpha} r,_{\beta} \frac{\partial r}{\partial n}) \\ &\quad + (\frac{c_1^2}{c_2^2} - 2) (\Psi_{,r}^* - \chi_{,r}^* - \chi_{\frac{1}{r}}^*) r,_{\beta} n_{\alpha} \\ &\quad + \frac{\delta}{\kappa} \omega \xi_{,r}^* r,_{\beta} n_{\alpha}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha 3}^* &= \frac{\eta \omega}{2\pi} \sum_{k=1}^3 W_k [2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \{ (\xi_{,r}^* - \xi_{\frac{1}{r}}^*) r,_{\alpha} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &\quad + \xi_{\frac{1}{r}}^* n_{\alpha} \} + (1 - 2 \frac{c_2^2}{c_1^2}) (\xi_{,r}^* + \xi_{\frac{1}{r}}^*) n_{\alpha} \\ &\quad + \xi^* n_{\alpha}] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Sigma_{3\beta}^* = \frac{\gamma}{2\pi \rho c_1^2} \sum_{k=1}^3 W_k [(\xi_{,r}^* - \xi_{\frac{1}{r}}^*) r,_{\beta} \frac{\partial r}{\partial n} + \xi_{\frac{1}{r}}^* n_{\beta}]$$

$$\Sigma_{33}^* = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 W_k \zeta_{,r}^* \frac{\partial r}{\partial n}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\psi_k^*(r) &= \left\{ \left( h_k^2 - \frac{\omega}{\kappa} \right) \left( h_k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) - \frac{\delta \omega h_k^2}{\kappa} \right\} K_0(h_k r) \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left( h_k^2 - \frac{\omega}{\kappa} \right) - \frac{\delta \omega}{\kappa} \right\} h_k \frac{1}{r} K_1(h_k r) \\
\chi_k^*(r) &= \left\{ \frac{1}{2(1-\nu)} \left( h_k^2 - \frac{\omega}{\kappa} \right) - \frac{\delta \omega}{\kappa} \right\} \{ h_k^2 K_0(h_k r) \\
&\quad + \frac{2}{r} h_k K_1(h_k r) \}
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\xi_k^*(r) = h_k \left( h_k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) K_1(h_k r)$$

$$\zeta_k^*(r) = \left( h_k^2 - \frac{\omega}{c_1^2} \right) \left( h_k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) K_0(h_k r)$$

$$w_1 = \frac{-1}{(h_1^2 - h_2^2)(h_3^2 - h_1^2)}, \quad w_2 = \frac{-1}{(h_1^2 - h_2^2)(h_2^2 - h_3^2)}$$

$$w_3 = \frac{-1}{(h_2^2 - h_3^2)(h_3^2 - h_1^2)}$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

ここで、 $K_0$ 、 $K_1$  は変形ベセル関数、 $c_1$ 、 $c_2$  は各々縦波および横波の伝播速度を表わし、添字については  $\alpha, \beta = 1, 2$ 、 $k = 1, 2, 3$  とする。

### 3. 離散化

境界積分方程式 (14) に対する離散化方程式を構成するために、まず、境界  $\Gamma$  を  $n$  分割し、境界上の未知関数を各要

素に対して次のように近似する。

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i(\mathbf{x}) &= \Phi^T(\xi) \bar{u}_i(\mathbf{x}_N) \\
 \bar{\tau}_i(\mathbf{x}) &= \Phi^T(\xi) \bar{\tau}_i(\mathbf{x}_N) \\
 \bar{\theta}(\mathbf{x}) &= \Phi^T(\xi) \bar{\theta}(\mathbf{x}_N) \\
 \bar{q}(\mathbf{x}) &= \Phi^T(\xi) \bar{q}(\mathbf{x}_N)
 \end{aligned} \tag{30}$$

ただし、 $\Phi^T(\xi)$ は内挿関数であり、 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{\tau}_i$ 、 $\bar{\theta}$ 、 $\bar{q}$ は各関数の節点値ベクトルである。これらの近似表現を用いて式(14)は次のように離散化することができる。

$$\begin{aligned}
 c_{ij} \bar{u}_j &= \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \bar{\tau}_\alpha v_{\alpha i}^* d\Gamma + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \bar{q} v_{3i}^* d\Gamma \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \bar{u}_\alpha \Sigma_{\alpha i}^* d\Gamma - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \bar{\theta} \Sigma_{3i}^* d\Gamma \\
 &\quad - \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \bar{B}_k v_{ki}^* d\Omega \quad (i, j, k=1, 2, 3, \alpha=1, 2)
 \end{aligned} \tag{31}$$

ただし、 $\bar{U}_\alpha = \bar{u}_\alpha$ 、 $\bar{U}_3 = \bar{\theta}$ である。

式(30)を式(31)に代入し、すべての節点に対して行列表現にすると次のようになる。

$$\mathbf{H}_1 \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{H}_2 \bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{G}_1 \bar{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{B}} \tag{32}$$

式(32)より構成される連立一次方程式を解くことによって境界上の未知量がすべて定められることになる。

## 4. ラプラス逆変換

ラプラス逆変換は複素積分によって次のように与えられる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\omega t} \bar{f}(\omega) d\omega \quad (33)$$

ここで、 $\bar{f}(\omega)$  が離散的なデータとして与えられるため、ラプラス逆変換は数値的に行なわなければならない。しかし、これまで報告されているいろいろな数値ラプラス逆変換のほとんどは解の挙動をある程度予測して、関数  $f(t)$  が減衰型であるか振動型であるかに依存して公式を採用しているために手法の汎用性に欠けている。<sup>13-15</sup> 一方、連成熱弾性問題においては、振動型と減衰型が混在するため汎用性の高い数値逆変換方法を採用しなければならない。<sup>2</sup> したがって、本手法ではいくつかの方法のうち比較的汎用性が優れ、精度がよい「細野の方法」を用いる。<sup>5,7</sup>

細野の方法によると、原関数は指数関数の近似と Euler 変換を用いて、 $N+M$  個の打ち切り項数に対する像関数値より次のように与えられる。<sup>6</sup>

$$f(t) = \frac{e^{\sigma}}{t} \left[ \sum_{n=1}^{N-1} \bar{f}_n + \frac{1}{2^{M+1}} \sum_{m=0}^M A_{M,m} \bar{f}_{N+m} \right] \quad (34)$$

ここで、

$$A_{M,M} = 1$$

$$A_{M,m-1} = A_{M,m} + \frac{(M+1)!}{m!(M-m+1)!} \quad (35)$$

また、 $N + M$  個の  $\omega_n$  およびそれに対する像空間での関数

$\bar{f}_n$  は次のように定義される。

$$\omega_n = \frac{1}{t} \left\{ \sigma + i \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi \right\} \quad (36)$$

$$\bar{f}_n = (-1)^n \operatorname{Im}\{\bar{f}(\omega_n)\} \quad (37)$$

ここで、 $\operatorname{Im}\{\}$  は  $\{\}$  内の複素数の虚部を意味する。

## 5. 数値解析例

以上で述べた提案手法の適用性及び妥当性を検証するためには、半無限空間における動的問題を選んで近似解析を行なう。解析には1次要素を用い、6点および8点 Gauss積分を行なった。また、数値ラプラス逆変換において、 $t < 0.8$  の場合は打ち切り項数を  $N=15, M=5, \sigma=5$ 、 $t \geq 0.8$  の場合は  $N=25, M=5, \sigma=5$  にしている。

図1に表わされているように、自由境界の全体に一樣な熱が与えられている半無限弾性体を考える。本論では代表的な半無限動的熱弾性問題の中で第2種 Danilovskaya問題<sup>16</sup>（自由境界と周囲との熱伝達条件を考慮し、step的に加熱を行なう問題）および Sternberg-Chakravorty問題<sup>17</sup>（自由境界での加熱条件がramp型である問題）を選んで近似解析を行なう。こ

これらの問題は、本質的に1次元問題であることから非連成問題に対しては解析解が知られているが、<sup>16,17</sup> 連成問題に対してはまだ解析解が知られていない。

本論では、第2種 Danilovskaya問題に対しては1次元問題として、Sternberg-Chakravorty問題に対しては2次元問題として各々連成境界要素解を求めた。

図2には2次元解析モデルの要素分割及び境界条件を示している。また、材料定数は次のものを採用する。

$$\begin{aligned}
 \mu &= 8.4 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \\
 \nu &= 0.25 \\
 \alpha &= 0.107 \times 10^{-4} / \text{K} \\
 k &= 0.105 \text{ cal/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K} \\
 \rho &= 7.84 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3 \\
 c &= 1.17 \times 10^2 \text{ cal/kg} \cdot \text{K}
 \end{aligned} \tag{38}$$

なお、解析において次のような無次元量を導入する。

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_i &= \frac{1}{a} x_i, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{T}, \quad \tilde{t} = \frac{\kappa}{a^2} t \\
 \tilde{\tau}_{ij} &= \frac{1}{\gamma T} \tau_{ij}, \quad \tilde{u}_i = \frac{\lambda + 2\mu}{a \gamma T} u_i
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$a = \frac{\kappa}{c_1} \tag{40}$$

簡単のために初期条件および物体力、内部発熱量を0と仮定

する。ここで、自由境界での境界条件は、第2種 Danilovskaya問題の場合は次のように与えられる。

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{t}) = 0 & , x = 0 \\ \tilde{q}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{t}) = H\{1 - \tilde{\theta}(\mathbf{x}_i, t)\}, & x = 0 \end{cases} \quad (41)$$

ただし、熱伝達率  $h$  より無次元熱伝達係数  $H$  を次のように与えるものとする。

$$H = \frac{\rho \kappa h}{(\lambda + 2\mu)k} \quad (42)$$

また、Sternberg-Chakravorty問題の場合は次のように与えられる。

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{t}) = 0 & , x_1 = 0 \\ \tilde{\theta}(\tilde{\mathbf{x}}_i, \tilde{t}) = \begin{cases} \tilde{\theta}/\theta, & 0 \leq \tilde{\theta} \leq \theta \\ 1, & \tilde{\theta} \geq \theta \end{cases} & , x_1 = 0 \end{cases} \quad (43)$$

ただし、

$$\theta = \frac{(\lambda + 2\mu)^2 t_0}{\rho^2 \kappa}$$

であり、 $t_0$  は図3に表わされているように ramp 時間である。

式(39)の無次元温度における  $T$  は、第2種 Danilovskaya問題の場合は  $T = \theta_s$  (周囲温度)、Sternberg-Chakravorty問題の場合は  $T = \theta_b$  (境界面の温度) にしている。



図4 - 図9は第2種 Danilovskaya 問題及び Sternberg-Chakravorty 問題の数値解析結果を示している。ここで、連成問題の "exact solution" は、文献[18]において数値逆変換を利用して得られた結果である。また、数値解は連成係数を  $\delta = 1.0$  にした時の結果である。

図4 - 図6は第2種 Danilovskaya 問題において  $H=0.5$  のとき  $\tilde{x} = 1.0$  の位置での時間に対応する応力、温度および変位の変化である。図4 - 図6より本手法の結果と exact solution とがよく一致していることが分かる。特に、図4の応力の場合、 $\tilde{t} = 1.0$  前後で応力は非常に激しく変化するとともに Nickell-Sackman による結果は exact solution からかなり離れているが、本手法による結果はよく一致している。

図7 - 図9は Sternberg-Chakravorty 問題において ramp time を  $t_0 = 0.25$  とした時、 $\tilde{x} = (1.0, 0.0)$  における無次元時間に対応する応力、温度及び変位の変化を示している。ここで、有限要素法による結果として、図7の応力の場合は Nickell-Sackman による1次元解析結果で、図8 - 図9の温度と変位は Oden-Kross<sup>19</sup> による解析結果である。このような無次元時間  $\tilde{t} = 0.0 \sim \tilde{t} = 2.0$  に対する short-time solution を求める場合、解の精度は無次元距離  $\tilde{x}_1 = 0.0$  から  $\tilde{x}_1 = 1.0$  までの要素数に大きく依存する。Nickell-Sackman および

Oden-Krossが使ったモデルはともに  $\tilde{\chi}_1 = 1.0$ まで10個の要素を使っている。一方、本手法では5個の線形境界要素を使っているが、図7のように解の変動が激しいときにも exact solutionによく一致していることが分かる。

また、以上の結果より本手法で数値ラプラス逆変換法として採用している細野の方法は汎用性及び精度がよいことを確かめた。ここで、打ち切り項数  $N+M$ は、多くの問題で  $N=10$ ,  $M=5$  として充分の精度を得ることができるが、図4のように解の変動が激しい場合は  $N$  を大きく取る必要がある。

## 6. 結論

本論では動的効果を考慮した線形連成熱弾性問題において、ラプラス変換による像空間における基本式を構成し、その基本式より得られた境界積分方程式の離散解を数値ラプラス逆変換により非定常解を求める手法を紹介した。また、提案された手法の適用性及び妥当性を調べるために2つの半無限領域に対する動的熱弾性問題に対し、本手法によって得られた連成数値解と exact solutionおよび有限要素法による結果とを比較したところ、良好な結果が得られ、本手法の有効性及び信頼性が検証された。なお、本論では2次元問題を対象としてその成果を述べてきたが、本手法をさらに3次元問題に

拡張することおよび、一般化された熱弾性問題へ適用することも行なっている。

#### 参 考 文 献

1. 登坂宣好、「線型連成熱弾性問題の境界積分方程式表現」  
境界要素法論文集、第3巻、pp.207-212, 1986.
2. 徐 日教、登坂宣好、「線型連成熱弾性問題の境界要素  
解析」、境界要素法論文集、第4巻、pp.99-104, 1987.
3. 徐 日教、登坂宣好、「半無限空間における連成熱弾性  
問題の境界要素解」、境界要素法論文集、第4巻、  
pp.104-110, 1987.
4. 登坂宣好、徐 日教、「一般化された動熱弾性問題の境  
界積分方程式表現」、境界要素法論文集、第4巻、  
pp.111-116, 1987.
5. 田崎政昭、中山 司、川原睦人、「ラプラス変換を用い  
た時間依存問題の境界要素解析」、構造工学における数  
値解析法シンポジウム論文集、第10巻、日本鋼構造協  
会、pp.22-27, 1986.
6. 細野敏夫、「数値ラプラス変換」、電気学会論文誌A、  
第99巻、第10号、pp.494-500, 1979.
7. 登坂宣好、中山 司、境界要素法の基礎、日科技連出版

- 社、1987.
8. 今村 勤、物理とグリーン関数、岩波書店、1978.
9. Tosaka, N., "New Integral Equation Formulation for Continuum Mechanics," Boundary Elements IX, 1, pp.131-142, 1987.
10. Predeleanu, M., "On a Boundary Solution Approach for the Dynamic Problem of Thermoviscoelasticity Theory," Numerical Methods in Heat Transfer, John Wiley & Sons Ltd., pp.135-150, 1981.
11. Predeleanu, M., "Analysis of Thermomechanical Coupling by Boundary Element Method," Thermo-mechanical Couplings in Solids, IUTAM Symp., pp.305-318, 1987.
12. Tanaka, M., and Tanaka, K., "A Boundary Element Approach to Dynamic Problems in Coupled Thermo-elasticity," SM Archives, 6, pp.467-491, 1981.
13. Cruse, T.A., and Rizzo, F.J., "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problems, I." J. Math. Anal. Appl., 22, pp.244-259, 1968.
14. Cruse, T.A., "A Direct Formulation and Numerical

- Solution of the General Transient Elastodynamic Problems, II." J. Math. Anal. Appl., 22, pp. 341-355, 1968.
15. Narayanan, G.V., and Beskos, D.E., "Numerical Operational Methods for Time-Dependent Linear Problems, Int. J. num. Meth. Engng, 18, pp. 1829-1854, 1982.
  16. Danilovskaya, V.I., "On a Dynamic Problem of Thermoelasticity," (in Russian), Prikladnaya Matematika i Mekhanika, 16, pp. 341-344, 1952.
  17. Sternberg, E., and Chakravorty, J.G., "On Inertia Effects in a Transient Thermoelastic Problem," ASME J. Appl. Mech., 26, pp. 503-509, 1959.
  18. Nickell, R.E., and Sackman, J.J., "Approximate Solutions in Linear, Coupled Thermoelasticity," ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 255-266, 1968.
  19. Oden, J.T., and Kross, D.A., "Analysis of the General Coupled Thermoelasticity Problems by the Finite Element Method," Proc. 2nd. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150, pp. 1091-1120, 1968.
  20. Nowacki, W., Thermoelasticity, Pergamon, 1986.
  21. Kupradze, V.D. (editor), Three-dimensional Problems

of the Mathematical Theory of elasticity and

Thermoelasticity, North-Holland, 1978.

22. Hörmander, L., Linear Partial Differential Operators

Springer-Verlag, 1946.

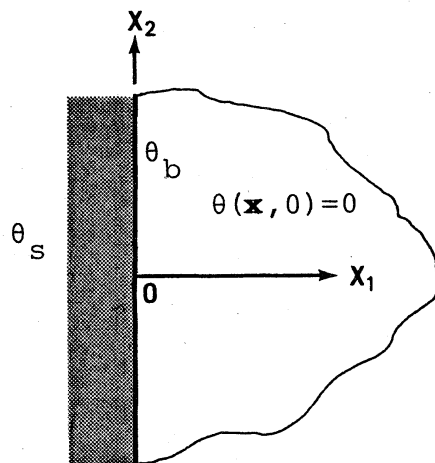


図 1 半無限空間

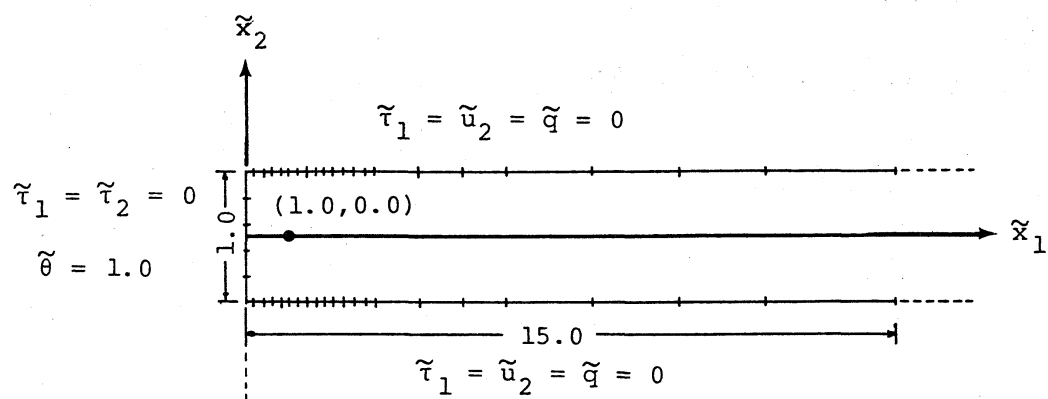


図 2 解析モデル

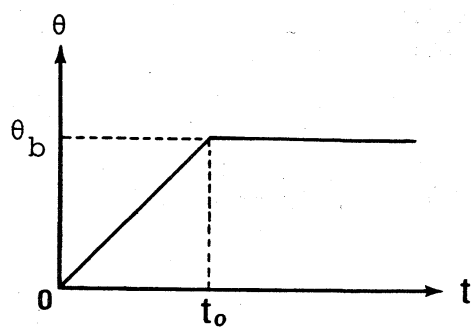


図 3 Sternberg-Chakravorty 問題における  
境界面の温度変化

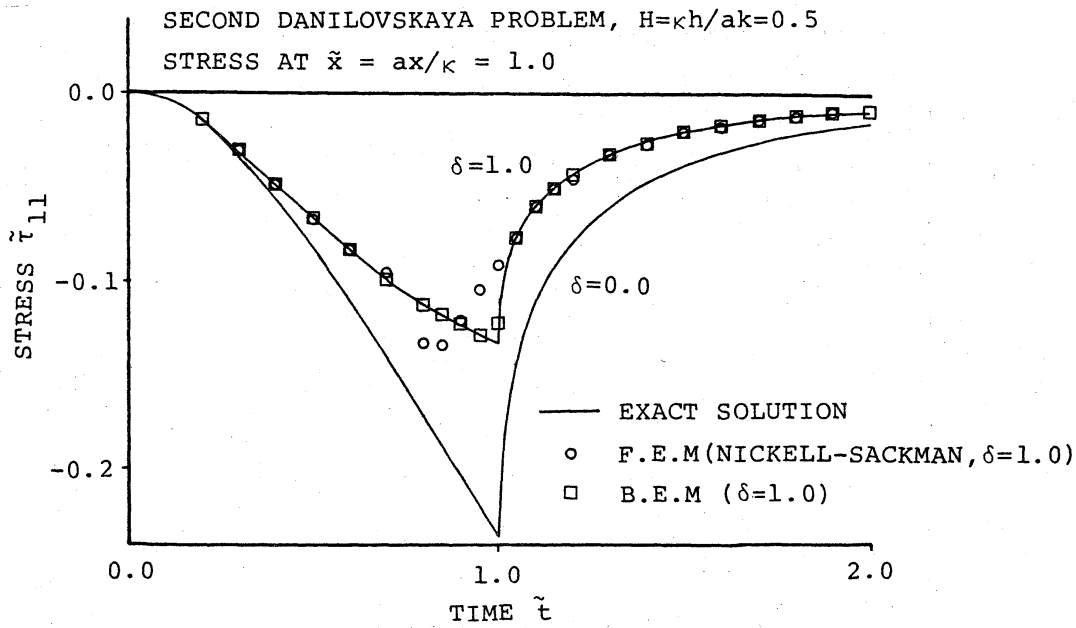


図 4  $\tilde{x}_1 = 1.0$  における時間  $\tilde{t}$  に対応する

応力  $\tilde{\tau}_{11}$  の変化 (第 2 種 Danilovskaya 問題)

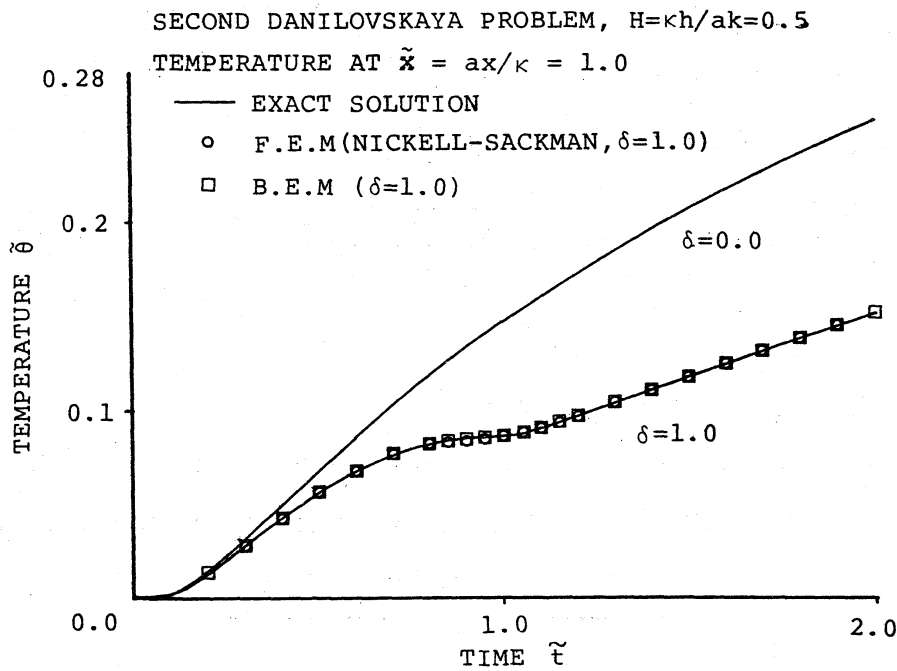


図 5  $\tilde{x}_1 = 1.0$  における時間  $\tilde{t}$  に対応する

温度  $\tilde{\theta}$  の変化 (第 2 種 Danilovskaya 問題)



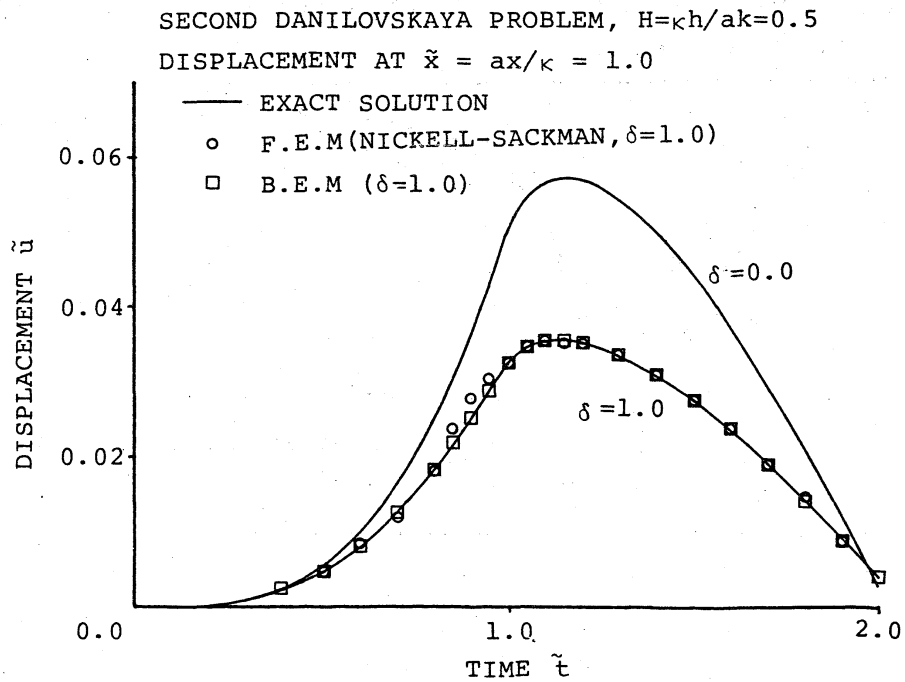


図 6  $\tilde{x}_1 = 1.0$  における時間  $\tilde{t}$  に対応する  
 変位  $\tilde{u}_1$  の変化 (第 2 種 Danilovskaya 問題)

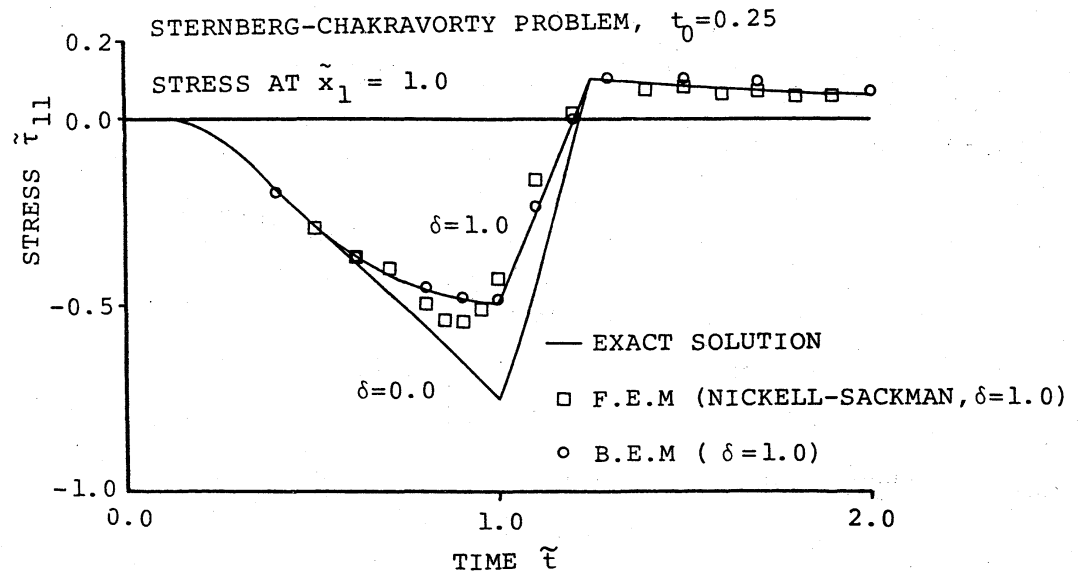


図 7  $\tilde{x}_1 = 1.0$  における時間  $\tilde{t}$  に対応する  
 応力  $\tilde{\tau}_{11}$  の変化 (Sternberg-Chakravorty 問題)

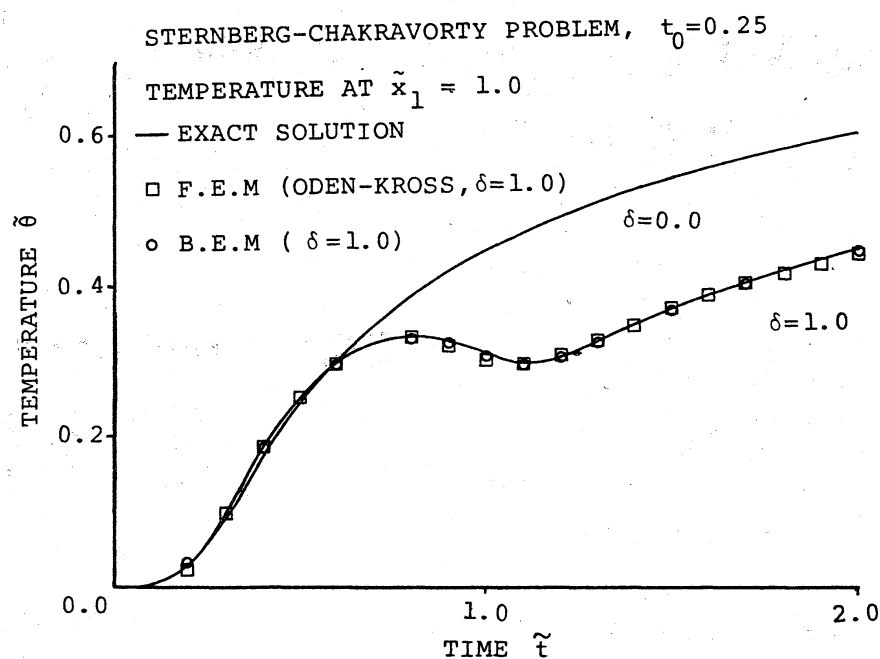


図 8  $\tilde{x}_1 = 1.0$  における時間  $\tilde{t}$  に対応する

温度  $\tilde{\theta}$  の変化 (Sternberg-Chakravorty問題)

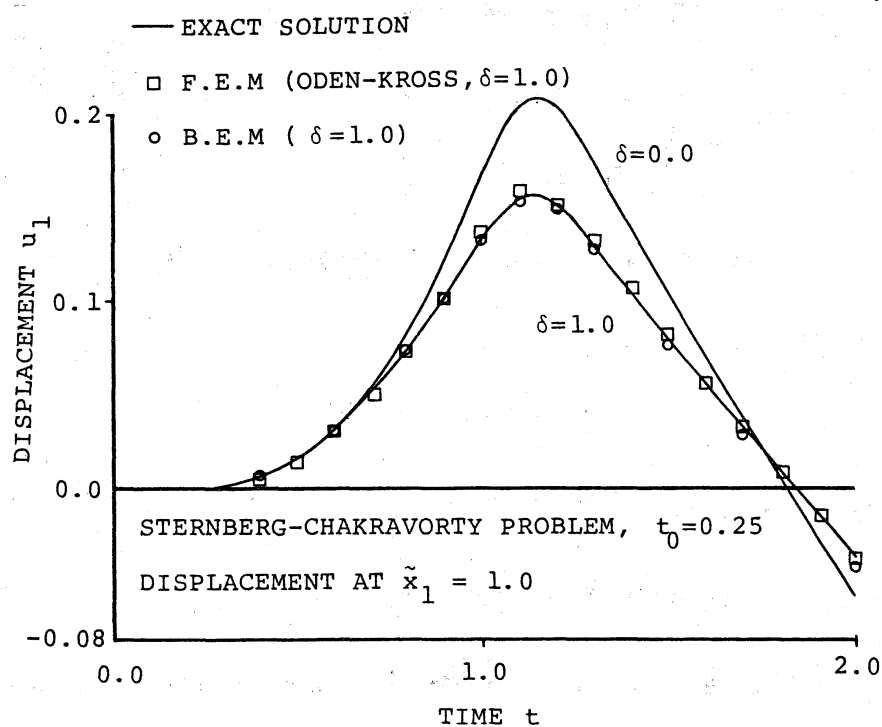


図 9  $\tilde{x}_1 = 1.0$  における時間  $\tilde{t}$  に対応する

変位  $\tilde{u}_1$  の変化 (Sternberg-Chakravorty問題)